Zusammenfassung
Grundgebiete der Elektrotechnik 3

RWTH Aachen, WS 2005, Univ.-Prof. Dr. Tobias Noll

Korrekturen bitte an Ralf.Wilke@rwth-aachen.de

7. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

(Zu überarbeiten)

Das folgende Dokument ist das Ergebnis meiner Vorbereitung auf die GET3-Klausur. Es darf ausschließlich kostenlos weitergegeben werden. Ich gewähre keine Garantie für die Richtigkeit; Verwendung auf eigene Gefahr.

Als Sekundärliteratur empfehle ich das vom Lehrstuhl herausgegebene Skript. Die Theorie des behandelten Stoffs ist hier in Prosa verständlich wiedergegeben. Dieses Dokument will das Skript des Lehrstuhls nicht ersetzen, vielmehr soll es anwendungsorientierte Zusatzinformationen liefern.

Manches kann man nur abschreiben oder schlechter machen...

2 Wissen

Hier wird das wichtigste Wissen aus dem Skript zusammengefasst.

2.1 Das elektrostatische Feld

2.1.1 Elektrische Ladung

Der Betrag der in der Natur (makroskopisch) vorkommenden Ladung ist ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung

$$e \approx 1,60217733 \cdot 10^-19 As$$

2.1.2 Coulombkraft

- Die Kraft zwischen 2 ruhenden Ladungen Q und q ist

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

  Dabei weist $\vec{e}_r$ von Q nach q.
- $\varepsilon_0 = 8,885418782 \cdot 10^-12 \frac{As}{Vm}$ heißt **elektrische Feldkonstante**.
- Mehrere Ladungen superponieren in ihrer Wirkung linear.
- Bei Ladungsverteilungen ist über den betrachteten Körper zu integrieren.
- Unter Anwesenheit von Materie reduziert sich die Coulomb-Kraft auf das $\frac{1}{\varepsilon_r}$-fache der oben definierten Kraft. ε_r heißt **relative Permittivitätszahl**.
- $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ heißt **Permittivität**.

2.1.3 Elektrische Feldstärke $\vec{E}$

- Um unabhängig von der Größe der Probeladung q zu werden, teilt man die von ihr hervorgerufene Coulombkraft durch ihre Ladung.

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}_q}{q}$$

- Bei Ladungsverteilungen ist zu integrieren.
- Die Kraft auf eine Ladung Q in einem E-Feld $\vec{E}$ ist

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

2.1.4 Graphische Darstellung

Das E-Feld ordnet jedem Raumpunkt eine lokale Eigenschaft zu. Dies ist die Kraft auf eine Probeladung q, würde man sie in das E-Feld einbringen. Die verschiedenen Möglichkeiten der graphischen Darstellung werden im Folgenden dargestellt.

- Quiver-Plot:
  Jeder Punkt in einer 2D-Ebene in einem willkürlich gewähltem Raster wird mit einem Pfeil versehn, dessen Länge den Betrag und dessen Richtung die Richtung des Feldes an diesem Ort repräsentiert.
  Nachteil: Wegen des großen Wertebereichs der Feldstärke ist ihr Betrag nur schlecht darstellbar.
- Betragshöhenlinien:
  Hier symbolisieren Pfeile konstanter Länge die Richtung, während Orte mit gleichem Betrag der Feldstärke durch Ortslinien verbunden werden.
- Feldlinien-Darstellung:
  Eine Feldlinie ist die Raumkurve, welche durchlaufen wird, wenn stets in Richtung der zugehörigen vektoriellen Größe fortgeschritten wird.
  Die Richtung ist durch die Tangente an die Kurve gegeben.
  Der Betrag wird durch die Dichte, also den Abstand der Feldlinen, wiedergegeben.
  Feldlinien beginnen an positiven Ladungen und enden an negativen Ladungen. Auf Äquipotentialflächen stehen Feldlinien immer senkrecht. **Vorteil:** Anschauliche Darstellung
  Nachteil: Bei der Überlagerung von Feldern kann das Superpositionsprinzip nicht angewendet werden.

2.1.5 Elektrische Flussdichte $\vec{D}$

Abkürzung für $\varepsilon \cdot \vec{E} = \vec{D}$. Dadurch können **Kraftgesetz** $\vec{F}_{qQ} = q \cdot \vec{E}$ und **Erzeugungsgesetz** $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi \cdot r_{qQ}^2} \cdot \vec{e}_q Q$ unabhängig voneinander formuliert werden.

2.1.6 Phänomenologische Materialgleichung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon((\vec{r}))} \cdot \vec{D}(\vec{r})$$

Hier sind durch die Permittivität ε_r in $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ die Polarisationseffekte der Materie beschrieben. Die Änderung durch ε_r lässt sich auch als Addition einer **el. Polarisation** $\vec{P}$ darstellen.
ACHTUNG: Die Polarisationsverscheibung dafür sorgt, dass sich an der positiven Seite z.B. eines Plattenkondensators negative Polisationsladungen anordnen. Die $\vec{P}$-Feldlinien laufen - nach +, im Gegensatz zu $\vec{E}$-Feldlinien. Die von den Polisationsladungen erzeugten inneren $\vec{E}$-Feldlinien wirken dem äußeren Feld entgegen.

Dadurch ergibt sich eine Abschwächung der Coulombkraft in Matrial mit $\varepsilon > 1$.

Die Feldlinien der elektrischen Polarisation sind denen In isotropen, linearen Dielektrika kann $\vec{P}$ durch die skalare, konstante Größe **Suszeptibilität** χ_e ausgedrückt werden.

$$\vec{P} = \chi_e \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Damit ist

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}, bzw \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

2.1.7 Elektrischer Fluss $\vec{\Psi}$

- Der el. Fluss ist das Integral über die el. Flussdichte.

$$\vec{\Psi} = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

- Bei einer geschlossenen Hüllfläche um eine Ladung Q ist die el. Flussdichte gleich der eingeschlossenen Ladung.

2.1.8 Gauß'scher Satz der Elektrostatik

xxxxxXXXX Gauß MatheXXX Daraus folgt durch Vergleich:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

2.1.9 Arbeit im el. Feld $\vec{W}$

xxxxxxxxxxDefinition Da das elektrische Feld konservativ ist, ist die Arbeit längs einer geschlossenen Kurve identisch 0. xxxx integral xxxxxx

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

2.1.10 Elektrische Spannung $\vec{U}$

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Völlig analog zum E-Feld wird die el. Spannung dadurch definiert, dass die durch Verschiebung der Ladung q von P_1 nach P_2 verrichtete Arbeit W_{12} durch den Betrag der Ladung Q geteilt wird.

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q}$$

2.1.11 Elektrostatisches Potential $\vec{\varphi}$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

- Für **endlich** ausgedehnte Ladungsanordnungen legt man gerne das Bezugspotential ins Unendliche.
- Potential einer Punktladung $\phi = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot}$ mit r = Abstand zur Punktladung.
- Nach HöMa III gilt
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$
- Graphische Darstellung

  Liegt die zu betrachtende Ladungsanordnung nur in einer Ebene, so kann das Potential als **Funktion von x und y** quasi-3D dargestellt werden. Zu beachten ist, dass

  1. der Wertebereich für φ beschränkt ist, d.h. bei Punktladungen das Potential in der Nähe der Ladung nicht darstellbar ist
  2. bei räumlicher Anordung von Ladungen diese Darstellungsform völlig versagt.

  Bei **Äquipotentialflächen und Äquipotentiallinien** gelingt die Darstellung analog zum E-Feld besser.
  Zu beachten ist, das elektrostatische Feldlinien auf Äquipotentialflächen stets senkrecht stehen.

2.1.12 Poisson-Gleichung, Laplace-Gleichung

Über diverse Umformungen (D durch E und dann E durch grad ϕ ersetzt) kann man von $div\vec{D} = \rho_e$ zu

$$\Delta\varphi_e = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

kommen. Dies ist die Poisson Gleichung. Sie gilt für alle Gebiete $\rho \neq 0$.
Für alle anderen Gebiet gilt die die Laplace Gleichung

$$\Delta\varphi_e = 0$$

Die Laplace Gleichung ist eigentlich nur die homogene Variante der Poisson Gleichung. Sie hat aber aufgrund ihrer großen Bedeutung einen eigenen Namen bekommen. Logisch kann man sich das so erklären, ohne eine Raumladungsverteilung ρ_e kann es keine Wendepunkte mehr im Potential geben (kann nur noch abnehmen) ?? kann man das so schreiben ?? Ich bin da noch nicht so durchgestiegen.

Das Lösen der Poisson-Gleichung ist gleichbedeutend mit der Bestimmung des elektrostatischen Potentials von einer gegebene Raumladungsverteilung ρ_e. Des Weiteren kann man mit dieser Gleichung zeigen, dass das elektrostatische Potential eindeutig (bis auf eine additative Konstante, die von der Wahl des Bezugpunktes kommt) ist. Außedem folgt aus ihr, dass auch für das elektrostatische Potential die gaußsche Mitelwertseigenschaft gilt, d.h. der Mittel**wert** von φ_e auf einer Oberfläche O einer beliebigen Kugel ist gleich dem Potential im Mittel**punkt** der Kugel.

Wenn die Laplace-Gleichung gilt ($\rightarrow \rho_e = 0$), ist das elektrostatische Potential eine harmonische Funktion. ($\rightarrow$ Eigenschaften siehe HöMa III) und kann mit den Mittel der Potentialtheorie [1] untersucht werden.

2.1.13 Kapazität

Die Kapazität einer Anordnung ist das Vermögen, Ladung auf den Elektroden zu speichern, normiert auf die zwischen ihnen anliegende Spannung.
Mit wachsender Ladung +Q bzw. -Q auf den beiden Elektroden nimmt auch die Spannung zwischen ihnen zu.
Die phänomenologische Materialgleichung und der Gauß'sche Satz der Elektrostatik liefern allgemein

$$C := \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\oiint\limits_H \varepsilon_r \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int\limits_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Elementgleichung des idealen Kondensators

$$i(t) = C \cdot \frac{du_{12}(t)}{dt}$$

Einige wichtige Kondensatorausprägungen:

- Kugelkondensator $C_1 = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}$
- Kugel im Unendlichen $C_2 = 4\pi\varepsilon \cdot r$
- Zwei Kugeln $C_3 = 4\pi\varepsilon \cdot r \cdot f(r,s) xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx$
- Plattenkondensator $C_4 = \varepsilon \cdot \frac{w \cdot l}{d}$ mit d: Plattenabstand, w x l: Abmessungen
- Zylinderkondensator $C_5 = \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$
- Zwei Zylinder $C_6 = \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln(\frac{s}{2r}) + \sqrt{\frac{s^2}{4r^2} - 1}}$ mit s: Abstand
- Zylinder über Platte $C_7 = 2 \cdot C_6$ mit $h = \frac{s}{2} - r$

2.1.14 Verschaltungen von Kondensatoren

- Parallelschaltung $C_{ges} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i$
- Serienschaltung $C_{ges} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{ges}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

[1] ein gewaltiger Werkzeugkasten oder Mathematik

Sind Kondensatoren aus geschichteten Dielektrika aufgebaut, bei denen die Schichtung parallel zu den el. Feldlinien ($\Longleftrightarrow$ senkrecht zu Äquipotentialflächen) oder senkrecht zu den el. Feldlinien ($\Longleftrightarrow$ parallel zu Äquipotentialflächen) orientiert ist, so ist die Zerlegung in Parallel- und Serienschaltung nach obigen Formeln möglich.

2.1.15 Enegieinhalt des el.-stat. Feldes

Die Arbeit, um ein el.-stat. Feld zu etablieren, ist

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

2.1.16 Energiedichte des el.-stat. Feldes

Der auf ein Volumen V bezogene Energieinhalt W ist

$$w := \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E = \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{\varepsilon}$$

2.1.17 Elektrostatische Kräfte im Kondensator

Die Wirkung der Coulombkraft kann jetzt direkt aus der gespeicherten Energie des el.-stat. Feldes ermittelt werden.

$$F = \frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \frac{d}{dr}(\frac{1}{C})$$

2.1.18 Feldbrechung an Grenzflächen

Tritt eine $\vec{E}$- oder $\vec{D}$-Feldlinie durch die Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit unterschiedlicher Permittivität ε, so wird die Feldlinie i.d.R. abgeknickt. Ist die Leitfähigkeit beider Materialien $\sigma_e = 0$, so kann gezeigt werden, dass

- die **tangentiale** Komponente des E-Feldes sowie
- die **normale** Komponente des D-Feldes

im Grenzflächenübergang stetig sein müssen.

Brechnungsgesetz Für $\sigma_e = 0$ gilt

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

wobei die Winkel zum Lot gezählt werden.

2.2 Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Bisher wurden Fälle betrachtet, in denen sich die Ladungsträger nicht bewegt haben. Jetzt wird eine stationäre Strömung zugelassen $\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, wobei alle anderen Größen weiterhin konstant bleiben sollen $\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}... = 0$.
Wenn Elektronen an ein Atom nur schwach gebunden sind, so geben sie dies im Kristall-Verband leicht ab. Die Ansammlung dieser freien Leitungselektronen nennt man Elektronengas.
Aufgrund der Temperaturbewegung wuseln die Leitungselektronen ungeordnet hin und her. Im zeitlichen Mittel haben sie sich dabei nicht von der Stelle bewegt. Liegt nun aber von Außen ein elektrisches Feld an, so wird die thermische Bewegung mit der Driftbewegung überlagert und im zeitlichen Mittel hat sich dann ein Leitungselektron entlang einer $\vec{E}$-Feldline bewegt.
Die mittlere Driftgeschwindigkeit ist $\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{e \cdot \vec{E}}{m_e}\right) \cdot \overline{\tau}$ mit $\overline{\tau}$: Mittlere freie Flugzeit.

2.2.1 Elektrische Stromdichte $\vec{J}$

Die Stromdichte ist die räumliche Dichte des Produkts aus den Ladungen der freien Ladungsträger und deren Geschwindigkeiten.

$$\vec{J} = \frac{d}{dV} \sum_{i=1} n Q_i \vec{v}_i$$

Ist die Ladungsträgerdichte n_{-e} gegeben, so gilt $\vec{J} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 \cdot n_{-e} \cdot \overline{\tau}}{m} \cdot \vec{E}$.

2.2.2 Elektrische Leistungsdichte

Die lokale eletrische Leistungsdichte pro Volumeneinheit ist

$$p_{el} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

vgl. $p_{el} = U \cdot I$ bei integralen Größen.

2.2.3 Lokales Ohm'sches Gesetz

Die **spezifische Leitfähigkeit** σ ist der Kehrwert des **spezifischen Widerstandes** $\sigma = \frac{1}{\rho} = \mu \cdot e \cdot n_{-e}$ mit $\mu := \frac{1}{2} \cdot \frac{en \cdot \overline{\tau}}{m}$ als Abkürzung.
Damit gilt das lokale Ohm'sche Gesetz

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} bzw. \vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

ACHTUNG Zur allemeinen Verwirrung ist damit der Lieblingsbuchstabe des EECS ρ nun dreifach belegt. [2]

[2]Über Sinn oder Unsinn dessen mache sich jede/jeder mal selbst Gedanken...

- ρ : Radius in Zylinderkoordinaten
- ρ : Raumladungsdichte auch ρ_e
- ρ : spezifischer Widerstand

Es zeigt sich durch Experimente, dass die eletriksche Leitfähigkeit und die Wärmeleitfähigkeit von Stoffen sich um den Faktor 6...8 unterscheiden, aber dennoch korrelieren.

2.2.4 Elektrische Stromstärke I

Die elektrische Stromstärke I eines durch die Fläche A fließenden Stromes ist das Integral der Stromdichte $\vec{J}$ über diese Fläche.

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot \underbrace{d\vec{A}}_{dA \cdot \vec{n}} = \frac{dQ}{dt}$$

Der Richtungssinn ist durch die Transportrichtung **positiver Ladungen** (technische Stromrichtung) gegeben.

2.2.5 Relaxationszeit

- Die Relaxation ist ein *nicht stationärer Vorgang* .
- Unter ihr versteht man das Abklingen einer Überschussladung (=einer Ladungsunausgewogenheit) in Materie mit Leitfähigkeit $\sigma < 0$
- Der Verlauf des Abklingens ist eponentiell mit $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot t}$
- Aus allgemeiner Sicht $A(t) = A_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$ ist somit $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$.
- Die Relaxationszeit von Kupfer ist $\tau \approx 1,5 \cdot 10^{-19}$ s. Damit kann Kupfer in allen elektrotechnischen Anwendungen als elektrisch neutral angesehn werden.
- D.h. nach Abklingen der Relaxation ist ein Leiter feldfrei und damit ein Äquipotentialgebiet.
- Folge: Eine geladene Vollkugel verhält sich elektrisch wie eine geladene Kugelschale (und **nicht** wie eine kugelförmige Ladungsverteilung.

2.2.6 Einschub $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

- **Kontinuitätsgleichung**
  Aus der Ladungserhaltung

  $$\iiint_V \rho \cdot dV = const.$$

  folgt

  $$\operatorname{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

Ausblick *dielektrische Absorption* $\rho(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \cdot \operatorname{grad} \frac{\varepsilon(\vec{r}}{\sigma(\vec{r})}$

- **Verschiebungsstromdichte , Polarisationsstromdichte**

2.2.7 Kirchhoff'sche Knotengleichung

Aus $\oiint\limits_H \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \leftrightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

2.2.8 Ohm'scher Widerstand

Unter Annahme einer homogenen Stromdichteverteilung über A gilt

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A}$$

2.2.9 Analogie zwischen $\vec{D}$ und $\vec{J}$

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$
Stationarität	Ladungsfreiheit
$\operatorname{div} \vec{J} = 0$	$\operatorname{div} \vec{D} = 0$
$\operatorname{div} (\sigma \cdot \vec{E}) = 0$	$\operatorname{div} (\varepsilon \cdot \vec{E}) = 0$
$0 \neq \sigma = const.$	$\varepsilon_0 \leq \varepsilon = const.$
$-\sigma \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$	$\varepsilon \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$
$const = \sigma \neq 0$	$const = \varepsilon_r \neq 1$
$I = \oiint\limits_H \vec{J} \cdot d\vec{A} = \sigma \cdot \oiint\limits_H \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$Q = \oiint\limits_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon \cdot \oiint\limits_H \vec{E} \cdot d\vec{A}$
$U_{12} = \int\limits_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$U_{12} = \int\limits_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$
$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\sigma \cdot \oiint_H \vec{E} \cdot d\vec{A}}$	$C = \frac{\varepsilon \cdot \oiint_H \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$

- $C \cdot R = \frac{\varepsilon}{\sigma} \Leftrightarrow R = \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \frac{1}{C}$
- $R_{Kugel} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \frac{1}{C_{Kugel}} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}{4\pi\sigma}$

3 Großgruppenübungen

Es folgen Besonderheiten und Kommentare zu den Aufgaben, nicht deren Lösung.

3.1 Aufgabe 1

Man merke sich

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_y \cdot \cos\varphi - \vec{e}_x \cdot \sin\varphi$$

3.2 Aufgabe 2

Man merke sich

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \cos\vartheta - \vec{e}_r \cdot \sin\vartheta$$

Drehmoment: $\vec{L} = \vec{l} \times \vec{F}_g$.

3.3 Aufgabe 3

$\sigma_e = \frac{dQ}{dA} \Rightarrow dQ = \sigma_e \cdot dx \cdot dy$ mit $Q = \iint\limits_A dQ = \iint\limits_A \sigma_e \cdot dA$ (Gauß)

1 C = 1 As = $\frac{1}{3600}$ Ah

4 Kleingruppenübungen

Es folgen Besonderheiten und Kommentare zu den Aufgaben, nicht deren Lösung.

4.1 Aufgabe 1

5 Formelsammlung